

# ПРИМЕРЫ ОТКРЫТЫХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

## PISA

[По материалам международного исследования  
образовательных достижений учащихся PISA 2003,  
2012 гг.]



*Учимся для жизни*

# СОДЕРЖАНИЕ

---

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ.....                   | 3  |
| Походка .....                   | 4  |
| Садовник .....                  | 7  |
| Поездка на машине .....         | 9  |
| Рост .....                      | 12 |
| Бытовые отходы .....            | 15 |
| Изготовление брошюры .....      | 17 |
| Велосипеды .....                | 19 |
| Вид башни .....                 | 22 |
| Покупка квартиры .....          | 24 |
| Скорость падения капель.....    | 26 |
| Продажа музыкальных дисков..... | 29 |
| Парусные корабли .....          | 33 |
| Соус .....                      | 38 |
| Подъём на гору фудзи .....      | 39 |
| Велосипедистка Елена.....       | 43 |
| Какая машина? .....             | 47 |
| Гараж.....                      | 50 |
| Вращающаяся дверь.....          | 54 |

---

## ВВЕДЕНИЕ

В данном сборнике приведены задания, которые были включены в тесты, использовавшиеся в исследовании PISA в 2003 и 2012 гг. К каждому заданию приведены результаты, показанные российскими 15-летними учащимися.

Рекомендуем до начала знакомства с примерами заданий исследования PISA познакомиться с теоретическими основами этого исследования и приведенным ниже текстом введения.

При определении содержательной области и познавательной деятельности, к которым следует отнести задание, авторы концепции PISA руководствуются следующими соображениями.

Решение о выборе содержательной области (*«Изменение и зависимости», «Пространство и форма», «Количество», «Неопределенность и данные»*) принимается с учетом того, насколько тесно связана описанная ситуация и её разрешение с содержанием этой области.

Задания, в которых главным в познавательной деятельности является переход от реальной проблемы к её математическому аналогу, относят к категории *«Формулировать»*. Задания, в которых главное – применить соответствующие математические знания, относят к категории *«Применять»*. В случае, где главное – использовать имеющуюся математическую информацию для решения реальной проблемы, задание относят к категории *«Интерпретировать»*.

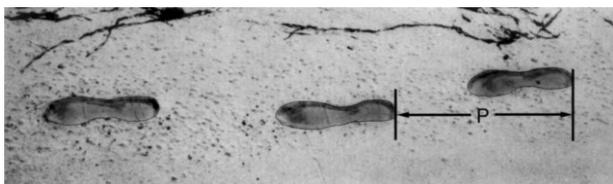
Контекст в заданиях, в которых описана ситуация, связанная с личными потребностями человека, относят к «личностной» категории. Если ситуация связана с нуждами общества, то контекст относят к «общественной» категории. В случаях, когда ситуация связана с профессиональными или школьными интересами, контекст относят к «профессиональной/учебной» категории. Если в задании ставится чисто математическая проблема, то контекст относят к «научной» категории.

При знакомстве с заданиями международных тестов в исследовании PISA следует иметь в виду, что основное требование при переводе текста задания с английского языка на языки стран-участниц – это максимальное сохранение одинакового смысла и одинаковой формы задания для всех стран. Поэтому возможно, что тексты некоторых заданий вам покажутся стилистически несовершенными, хотелось бы их переформулировать в более привычную редакцию. Однако перевод каждого задания на русский язык утверждается международными экспертами – специалистами в английском и русском языках, которые оценивают адекватность сделанного перевода. Поэтому достаточно часто при переводе приходится строго придерживаться английского варианта, хотя иногда сделанный перевод выглядит не совсем по-русски или не совсем привычно для наших учебников. К сожалению, значительные отступления от английского текста не пропускаются международными экспертами.

Обращаем ваше внимание на то, что критерии оценки выполнения заданий, разработаны международной комиссией, ими же к рассматриваемым заданиям подобраны примеры ответов, данных учащимися при их выполнении. Возможно, вам покажется, что критерии к некоторым заданиям, где надо привести решение или объяснение полученного ответа, не такие жесткие, как это принято в практике российской школы. Однако именно эти критерии применяются во всех странах-участницах при оценке работ учащихся. Вообще в исследовании PISA основным критерием при оценке ответов учащихся является наличие решения любым доступным учащемуся способом, хотя бы и методом «проб и ошибок». Гораздо меньше внимания уделяется строгости и полноте записи решения или объяснения и его оформления.

---

# ПОХОДКА



На рисунке изображены следы идущего человека. Длина шага  $P$  – расстояние от конца пятки следа одной ноги до конца пятки следа другой ноги.

Для походки мужчин зависимость между  $n$  и  $P$  приближенно выражается формулой  $\frac{n}{P} = 140$ , где

$n$  – число шагов в минуту,

$P$  – длина шага в метрах.

---

## Вопрос 1: ПОХОДКА

M124Q01- 0 1 2 9

Используя данную формулу, определите, чему равна длина шага Сергея, если он делает 70 шагов в минуту.

Запишите решение.

### ПОХОДКА: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

**Ответ принимается полностью**

Код 2: 0,5 м или 50 см,  $\frac{1}{2}$  (единицы измерения не учитываются).

- $70/p = 140$   
 $70 = 140 p$   
 $p = 0,5$
- $70/140$

**Ответ принимается частично**

Код 1: Правильно подставлены в формулу значения переменных, но дан неверный ответ или ответ не указан совсем.

- $\frac{70}{p} = 140$  [только подставлены в формулу значения переменных].
- $\frac{70}{p} = 140$   
 $70 = 140 p$   
 $p = 2$  [правильно подставлены в формулу значения переменных, но последующие вычисления неверные].

ИЛИ

Правильно преобразована исходная формула в формулу  $P=n/140$ , но далее не приведено верное решение.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.  
• 70 см.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 3: ПОХОДКА**

M124Q03- 00 11 21 22 23 24 31 99

Павел знает, что длина его шага равна 0,80 м.

Используя данную выше формулу, вычислите скорость Павла при ходьбе в метрах в минуту (м/мин), а затем в километрах в час (км/ч).

Запишите решение.

**ПОХОДКА: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3**

**Ответ принимается полностью**

Код 31: Даны оба верных ответа (единицы измерения не учитываются) в м/мин и в км/ч:

$$n = 140 \times 0,80 = 112.$$

За минуту он проходит  $112 \times 0,80 = 89,6$  м.

Его скорость – 89,6 м/мин.

Таким образом, его скорость – 5,38 или 5,4 км/ч.

Если указаны оба верных ответа (89,6 и 5,4), ответ кодируется кодом 31 независимо от того, записано ли решение или не записано. Имейте в виду, что ответ принимается, если допущены ошибки в округлении, например, дан ответ 90 м/мин и 5,3 км/ч (89 x 60).

- 89,6; 5,4
- 90; 5,376 км/ч
- 89,8; 5376 м/ч [имейте в виду, что если второй ответ дан без указания единиц измерения, то ответ ученика кодируется кодом 22].

**Ответ принимается частично (2 балла)**

Код 21: Выполнено первое действие, отвечающее коду 31, но затем не выполнено умножение на 0,80, т.е. ученик не выразил число шагов в минуту в метрах. Например, указал скорость 112 м/мин и 6,72 км/ч.

- 112; 6,72 км/ч.

Код 22: Верно указана скорость в метрах в минуту (89,6 м/мин), но указана неверно или совсем не указана скорость в км/ч.

- 89,6 м/мин, 8960 км/ч.
- 89,6; 5376
- 89,6; 53,76
- 89,6; 0,087 км/ч
- 89,6; 1,49 км/ч

Код 23: Явно продемонстрирован верный способ решения, но допущены незначительные вычислительные ошибки, не учитываемые кодами 21 и 22. Ни один из ответов не является верным.

- $n=140 \times 0,8 = 1120$ ;  $1120 \times 0,8 = 896$ . Его скорость: 896 м/мин, 53,76 км/ч.
- $n=140 \times 0,8 = 116$ ;  $116 \times 0,8 = 92,8$ . 92,8 м/мин -> 5,57 км/ч.

Код 24: Указана скорость только 5,4 км/ч. Не приведены далее промежуточные вычисления и не указана скорость 89,6 м/мин.

- 5,4
- 5,376 км/ч
- 5376 м/ч

**Ответ принимается частично (1 балл)**

Код 11:  $n = 140 \times 0,80 = 112$ . Далее либо записаны неверные действия, либо вообще ничего не записано.

- 112
- $n=112$ ; 0,112 км/ч
- $n=112$ ; 1120 км/ч
- 112 м/мин; 504 км/ч

**Ответ не принимается**

Код 00: Другие ответы.

Код 99: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 3.** Ключевым моментом создания модели для определения скорости движения является понимание того, что скорость движения зависит от количества шагов за указанное время. Кроме того, для решения задачи важно умение выразить одну из переменных в формуле через другие переменные. Поэтому задание отнесено к области «*Изменение и зависимости*». Сам контекст носит *личный* характер. По характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Формулировать*».

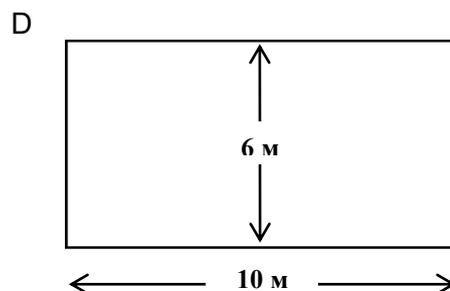
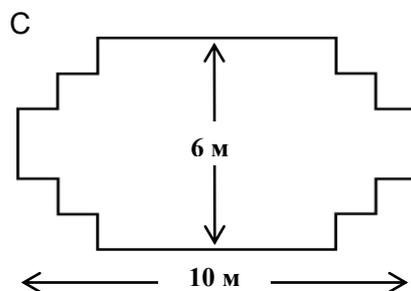
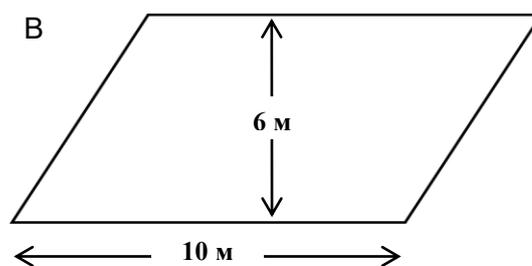
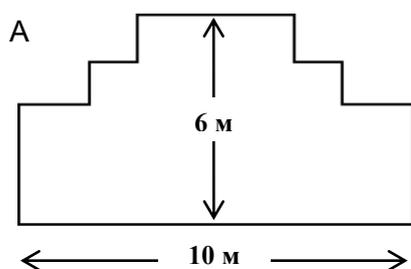
Задание совершенно нетипичное по сравнению со стандартными задачами на движение. Многих учащихся затруднил перевод скорости, выраженной в одних единицах измерения – *км/мин*, в другие – *км/ч*. Поэтому оно оказалось достаточно трудным для большинства учащихся, в 2000 году с ним полностью справились 22% российских учащихся.

# САДОВНИК

## ВОПРОС 1: САДОВНИК

M266Q01

У садовника имеется 32 м провода, которым он хочет обозначить на земле границу клумбы. Форму клумбы ему надо выбрать из следующих вариантов.



Обведите слово «Да» или «Нет» около каждой формы клумбы в зависимости от того, хватит или не хватит садовнику 32 м провода, чтобы обозначить ее границу.

| Форма клумбы | Хватит ли 32 м провода, чтобы обозначить границу клумбы? |
|--------------|--|
| Форма А      | Да / Нет   |
| Форма В      | Да / Нет   |
| Форма С      | Да / Нет   |
| Форма D      | Да / Нет   |

## САДОВНИК: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

**Ответ принимается полностью**

Код 2: Даны все четыре верных ответа

Форма А Да

Форма В Нет

Форма С Да

Форма D Да

**Ответ принимается частично**

Код 1: Дано три верных ответа.

**Ответ не принимается**

Код 0: Два или менее.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

Возможные рассуждения: Если выпрямить стороны многоугольников (формы А и С), то получим прямоугольники со сторонами 10 м и 6 м. Тогда периметры клумбы на планах А, С, D равны ровно 32 м. Для определения длины боковой стороны параллелограмма (форма В) возможно такое рассуждение: на рисунке явно видно, что боковые стороны (наклонные) параллелограмма (форма В) по длине больше его высоты, равной 6 м. Значит, периметр клумбы формы В более 32 м.

Задание оказалось достаточно трудным для большинства учащихся, в 2000 году с ним полностью справились (обвели слово «Да» в первой, третьей и четвертой строках таблицы и слово «Нет» во второй строке) около 20% из всех участников исследования и около 23% российских учащихся.

Ключевым моментом для решения задачи является опора на пространственное воображение при преобразовании в прямоугольники форм А и С, а также знание свойств параллелограмма и знание понятия периметра многоугольников, поэтому задание отнесено к области «*Пространство и форма*». Сам контекст носит *профессиональный* характер. По характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Применять*».

---

## ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ

Марина отправилась покататься на своей машине. Во время поездки дорогу перед машиной перебежала кошка. Марина резко нажала на тормоз и сумела объехать кошку.

Взволнованная этим происшествием Марина решила вернуться домой.

На приведенном ниже графике упрощенно представлена скорость машины во время поездки.



---

### Вопрос 1: ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ

M302Q01

Какова наибольшая скорость машины во время поездки?

Наибольшая скорость:      км/ч.

### ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

**Ответ принимается полностью**

Код 1:    60 км/ч.

**Ответ не принимается**

Код 0:    Другие ответы.

Код 9:    Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 2: ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ**

M302Q02 - 0 1 9

Сколько было времени, когда Марина нажала на тормоз, чтобы не переехать кошку?

Ответ:

**ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2**

**Ответ принимается полностью**

Код 1: 9.06

ИЛИ

6 минут десятого.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 3: ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ**

M302Q03 - 0 1 9

Было ли расстояние, которое проехала Марина, возвращаясь домой, короче, чем расстояние, которое она проехала от дома до того места, где случилось происшествие с кошкой? Ответ объясните, используя информацию, представленную на графике.

.....

.....

.....

.....

**ПОЕЗДКА НА МАШИНЕ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3**

**Ответ принимается полностью**

Код 1: Говорится, что путь домой был короче, и дано соответствующее объяснение. Объяснение связано и с тем, что средняя скорость была меньше, и с тем, что на обратный путь ушло примерно такое же время, или приведены подобные аргументы. Следует иметь в виду, что аргументы, основанные на меньшей площади под графиком скорости на обратном пути, также можно принимать полностью.

- Первая часть расстояния была больше, чем обратный путь, на который ушло столько же времени, но на первой части пути она ехала намного быстрее, чем на второй.
- Путь Марины домой был короче, потому что на него ушло меньше времени, а ехала она медленнее.

### **Ответ не принимается**

Код 0: Дан верный ответ без соответствующего объяснения.

- Он был короче, потому что, когда она нажала на тормоз, у нее как раз ушло около половины времени.
- Путь домой был короче. Он занимает 8 квадратов, а путь туда занимает 9 квадратов.

ИЛИ

Другие ответы.

- Нет, он был такой же, потому что у нее ушло шесть минут, чтобы вернуться обратно, но она ехала медленнее.
- По графику, если вы включите время, которое у Марины ушло на то, чтобы снизить скорость из-за кошки, то время может быть на пару секунд меньше, но при округлении оно примерно такое же.
- По графику можно сказать, что расстояние до того места, где она остановилась, и обратный путь домой одинаковы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Этот, казалось бы, несложный вопрос вызвал затруднение почти у четверти российских учащихся – 75% верных ответов. Среди учащихся стран ОЭСР на него ответили 78%. Видимо, затруднение было вызвано непривычной шкалой на оси  $x$ .

**Вопрос 3.** Ключевыми моментами при решении задачи является интерпретация графика скорости и понимание зависимости пройденного расстояния от скорости и времени движения. Поэтому задание отнесено к области «Изменение и зависимости», ситуация «личностная», а характер познавательной деятельности «Интерпретировать».

Задание оказалось трудным для большинства участников исследования. Среди российских учащихся с ним справились только около 20%, а среди стран ОЭСР – 30%.

---

## РОСТ

В классе 25 девочек. Их средний рост равен 130 см.

---

### Вопрос 1: РОСТ

M421Q01 - 0 1 9

Объясните, как подсчитать средний рост девочек.

### РОСТ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### *Ответ принимается полностью*

Код 1: Объяснения, в которых говорится, о том, что нужно суммировать рост всех девочек и разделить на 25.

- Вы складываете рост всех девочек и делите на число девочек.
- Возьмите рост всех девочек, сложите и разделите на количество девочек, что в данном случае равно 25.
- Сумма роста всех девочек в этом классе, разделенная на число девочек.

#### *Ответ не принимается*

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

### Вопрос 2: РОСТ

M421Q02

Обведите слово «Верное» или «Неверное» около каждого из следующих утверждений.

| Утверждение   | Верное или Неверное |
|---|---------------------|
| Если в классе есть девочка ростом 132 см, то обязательно должна быть девочка ростом 128 см.   | Верное / Неверное   |
| У большинства девочек рост должен быть 130 см.  | Верное / Неверное   |
| Если выстроить девочек по росту, начиная с самой маленькой и кончая самой высокой, то прямо посередине должна стоять девочка ростом 130 см. | Верное / Неверное   |
| Половина девочек в классе должна быть выше 130 см, а другая половина должна быть ниже 130 см.   | Верное / Неверное   |

### РОСТ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

#### *Ответ принимается полностью*

Код 1: Неверное, Неверное, Неверное, Неверное.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

### Вопрос 3: РОСТ

M421Q03

Оказалось, что рост одной из девочек был указан неверно. Ее рост вместо 145 см должен быть 120 см. Найдите правильное значение среднего роста девочек в этом классе.

A 126 см

B 127 см

C 128 см

D 129 см

E 144 см

### РОСТ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3

**Ответ принимается полностью**

Код 1: D. 129 см.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Для ответа на вопрос требуется применить известный алгоритм подсчета среднего значения набора данных. Однако сама постановка вопроса непривычна, поэтому только 47% российских учащихся верно ответили на вопрос. Среди учащихся стран ОЭСР задание выполнили 63%.

Задание отнесено к области «*Неопределенность и данные*». Сам контекст носит *научный* характер. По характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Применение*».

**Вопрос 2.** Ключевой аспект при проверке истинности этих утверждений – опора на интерпретацию понятия среднего роста, требующую глубокого понимания его смысла. Надо понимать, что среднее значение роста может быть не равно ни одному из значений роста 25 девочек. Оно также не определяет значения и различия между значениями роста 25 девочек. Поэтому неудивительно, что задание оказалось трудным для большинства учащихся – в 2003 г. верно оценили истинность всех утверждений только 19% российских учащихся и 18% учащихся стран ОЭСР.

Задание отнесено к области «*Неопределенность и данные*». Сам контекст носит *научный* характер. По характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Интерпретировать*», т.к. требуется оценить истинность данных утверждений.

**Вопрос 3.** Нет готового алгоритма вычисления среднего значения в предложенной ситуации. Для получения ответа можно рассуждать так: надо найти общую сумму роста всех 25 девочек, используя средний рост, равный 130 ( $130 \cdot 25$ ), затем вычесть из неё разность 145 и 120 ( $140 - 120 = 25$ ) и полученное число

разделить на 25.

Есть и другой подход к получению ответа: рост одной девочки уменьшился на 25 ( $140 - 120 = 25$ ). Значит, общая сумма роста 25 девочек уменьшилась на 25. Это можно интерпретировать так: в этом случае значение роста каждой из 25 девочек уменьшилось бы на 1 см. Отсюда следует, что средний рост стал бы меньше на 1 см, т.е. будет  $130 - 1 = 129$  (см).

Неудивительно, что задание затруднило большинство российских учащихся – с ним справились только 35%.

Для ответа на вопрос требуется создать модель решения на основе известного алгоритма подсчета среднего значения набора данных, поэтому по характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Формулировать*». Содержание задания связано с областью «*Неопределенность и данные*». Сам контекст носит *общественный* характер.

# БЫТОВЫЕ ОТХОДЫ

## Вопрос 1: БЫТОВЫЕ ОТХОДЫ

M505Q01 - 0 1 9

В качестве домашнего задания по окружающей среде учащиеся собирали информацию о времени, необходимом для разложения некоторых видов бытовых отходов, которые выбрасывают люди.

| Бытовые отходы       | Время разложения |
|----------------------|------------------|
| Банановая кожура     | 1–3 года         |
| Апельсиновые корки   | 1–3 года         |
| Картонные коробки    | 0,5 года         |
| Жевательная резинка  | 20–25 лет        |
| Газеты               | Несколько дней   |
| Полистироловые чашки | Более 100 лет    |

Ученик хочет изобразить эти данные на столбчатой диаграмме.

Приведите **одну** причину, по которой использование столбчатой диаграммы неудачно для изображения этих данных.

## БЫТОВЫЕ ОТХОДЫ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

### **Ответ принимается полностью**

Код 1: Причина сфокусирована на большом различии между данными для некоторых видов мусора.

- Различие в высоте столбцов на столбчатой диаграмме будет слишком большим.
- Если взять столбик в 10 см для полистирола, то столбик для картонных коробок будет высотой 0,05 см.

ИЛИ

Причина сфокусирована на неопределенности данных для некоторых видов мусора.

- Высота столбика для «полистироловых чашек» неопределимая.
- Вы не построите один столбик для данных 1-3 года или один столбик для данных 20-25 лет.

### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

- Потому что она не годится.
- Пиктограмма лучше.
- Вы не можете проверить эту информацию.
- Потому что числа, указанные в таблице, приближенные.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

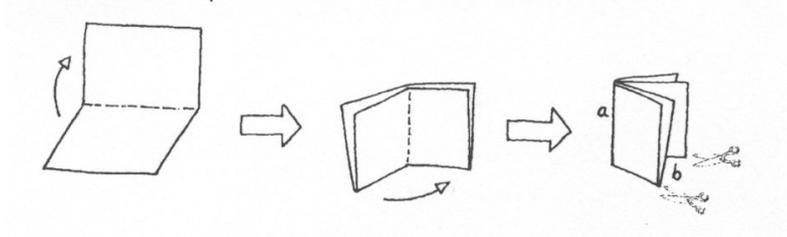
Ключевым моментом для решения задачи является интерпретация и представление имеющихся данных, поэтому задание отнесено к области «*Неопределенность и данные*». Сам контекст носит *научный* характер. По характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Интерпретировать*». Задание оказалось средней трудности, в 2003 году с ним справились 51% из всех участников исследования.

# ИЗГОТОВЛЕНИЕ БРОШЮРЫ

## Вопрос 1: ИЗГОТОВЛЕНИЕ БРОШЮРЫ

M598Q01 - 0 1 9

Рисунок 1



На рисунке 1 показано, как сделать небольшую брошюру. Необходимые указания даны ниже:

- Возьмите лист бумаги и сложите его два раза пополам.
- Скрепите по краю *a*.
- Разрежьте по двум нижним краям, обозначенным *b*.

В результате получится небольшая брошюра, в которой восемь страниц.

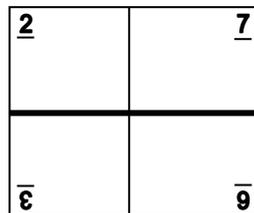
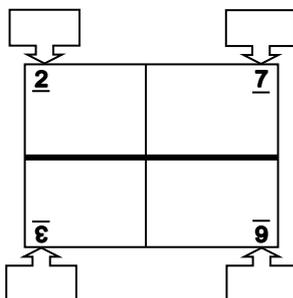


Рисунок 2

На рисунке 2 показана одна сторона листа бумаги, из которого сделали такую брошюру. Номера страниц были написаны на листе заранее.

Жирная линия показывает, где надо разрезать сложенный лист бумаги.

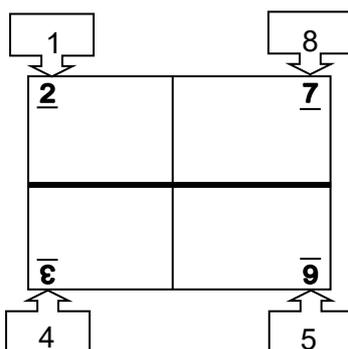
На следующем рисунке запишите номера 1, 4, 5 и 8 в соответствующих рамках, чтобы показать номера страниц, которые находятся на обратной стороне страниц: 2, 3, 6 и 7.



### ИЗГОТОВЛЕНИЕ БРОШЮРЫ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### **Ответ принимается полностью**

Код 1: Номера страниц размещены правильно на соответствующих местах (не учитывайте ориентацию записанных номеров):



#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

#### *Комментарии:*

При ответе на данный вопрос надо использовать свой жизненный опыт и мысленно вообразить, как расположены номера страниц в книге. В этой книге номера страниц начинаются с №1, затем следует разворот, на котором помещаются две страницы – слева с четным номером 2, а справа – 3 и т.д. То есть нечетные номера страниц стоят впереди последующего за ним четного номера. Значит, перед числом 2 будет 1, перед числом 6 будет 5. Тогда за страницей 3 следует страница 4, а за страницей 7 – 8.

Таким образом, задание следует отнести к области «*Пространство и форма*». Сам контекст носит *профессиональный* характер. По характеру преобладающей познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «*Формулировать*».

Непривычная ситуация затруднила почти треть учащихся. С заданием справились 72% российских и 64% учащихся стран ОЭСР.

---

## ВЕЛОСИПЕДЫ

Юрий, Мария и Петр ездят на велосипедах разных размеров. В таблице указаны расстояния, которые проезжают их велосипеды при разном числе полных оборотов колес.

|       | Пройденное расстояние (в см) |           |           |           |            |            |
|-------|------------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|
|       | 1 оборот                     | 2 оборота | 3 оборота | 4 оборота | 5 оборотов | 6 оборотов |
| Петр  | 96                           | 192       | 288       | 384       | 480        | ...        |
| Мария | 160                          | 320       | 480       | 640       | 800        | ...        |
| Юрий  | 190                          | 380       | 570       | 760       | 950        | ...        |

---

### Вопрос 1: ВЕЛОСИПЕДЫ

M810Q01

Петр прокатил вперед свой велосипед так, что при этом колеса сделали три полных оборота. Если Юра сделает то же самое со своим велосипедом, то насколько дальше продвинется вперед его велосипед, чем у Петра? Ответ укажите в сантиметрах.

Ответ:            см.

### ВЕЛОСИПЕДЫ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

**Ответ принимается полностью**

Код 1:    282 см

**Ответ не принимается**

Код 0:    Другие ответы.

Код 9:    Ответ отсутствует.

---

### Вопрос 2: ВЕЛОСИПЕДЫ

M810Q02

Сколько полных оборотов должны сделать колеса велосипеда Марии, чтобы проехать 1280 см?

Ответ: количество оборотов            .

### ВЕЛОСИПЕДЫ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

**Ответ принимается полностью**

Код 1:    8.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 3: ВЕЛОСИПЕДЫ**

M810Q03 - 00 11 12 21 99

Длина окружности покрышки колеса велосипеда Петра равна 96 см или 0,96 м. У его велосипеда три скорости, которые устанавливаются с помощью нижней, средней и верхней передач. У этого велосипеда следующие передаточные соотношения:

нижнее      3:1                                  среднее      6:5                                  верхнее      1:2

Сколько раз надо Петру повернуть педали, чтобы проехать 960 м на средней передаче? Приведите решение.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Передаточное соотношение 3:1 означает, что при трех полных поворотах педалей колесо велосипеда делает 1 полный оборот.

**ВЕЛОСИПЕДЫ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3**

**Ответ принимается полностью**

Код 21: 1200 поворотов педалей, и приведено верное решение. Имейте в виду, что верный числовой ответ даже при отсутствии решения демонстрирует использование верного метода решения, такой ответ принимается полностью.

- Чтобы проехать 960 м, колеса должны сделать 1000 полных оборотов, что соответствует  $1000 \cdot \frac{6}{5} = 1200$  поворотам педалей.

**Ответ принимается частично**

Код 11: 12 поворотов педалей. Использован правильный способ решения, но допущены ошибки при переводе единиц измерения.

- Чтобы проехать 960 м, колеса должны сделать 10 оборотов (ученик забыл, что расстояние в таблице дано в см), что соответствует  $10 \cdot \frac{6}{5} = 12$  поворотам педалей.

Код 12: Верный способ решения, но имеется незначительная вычислительная ошибка или вычисления не закончены.

- При 3 поворотах педалей колесо совершает 2,5 оборота. 1 оборот колеса = 0,96 м, значит, 3 оборота педалей = 2,4 м. Поэтому нужно 400 поворотов педалей, чтобы проехать 960 м.
- 1000 оборотов педалей потребуется (960:0,96), чтобы проехать 960 м, поэтому потребуется 833 поворота педалей на средней передаче (5/6 от 1000). *[Метод решения верный, но взято обратное отношение.]*
- $5 \cdot 0,96 = 4,8$  и  $960:4,8 = 200$  поворотов педалей. Сейчас  $200:5 = 40$  и  $40 \cdot 6 = 240$ . Поэтому потребуется 240 поворотов. *[Допущена единственная ошибка. Выполнено излишнее умножение на число 5, а в остальном метод решения верный.]*

### **Ответ не принимается**

Код 00: Другие ответы.

- $96000:5 = 19200$ .  $19200 \cdot 6 = 115200$  поворотов педалей. [Не учтена окружность колеса.]

Код 99: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Для ответа на вопрос надо извлечь нужные данные из первой и третьей строк (288 и 570) столбца таблицы «3 оборота», затем найти их разность. Вопрос простой, однако почти треть учащихся с ним не справилась. Ответили на вопрос 69% российских и 68% учащихся стран ОЭСР.

**Вопрос 2.** Для ответа на вопрос надо извлечь нужное данное (160) из второй строки первого столбца таблицы «1 оборот», затем разделить 1280 см на это число. Вопрос простой, однако около четверти учащихся с ним не справилась. Ответили на вопрос 73% российских и 72% учащихся стран ОЭСР.

Задание следует считать простой текстовой задачей на движение. Поэтому оно отнесено к области «Количество», а по виду деятельности к категории «Применить».

**Вопрос 3.** Решение задачи облегчает приведенная трактовка понятия «передаточное соотношение». Задание – текстовая задача на прямую пропорциональность. Поэтому задание отнесено к области «Количество», вид деятельности – «Применить» известный алгоритм.

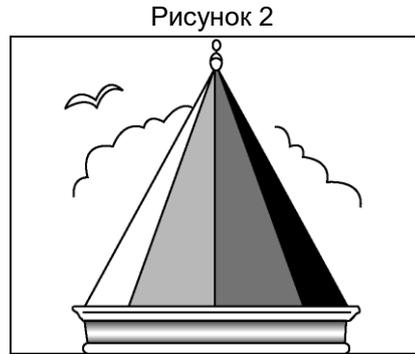
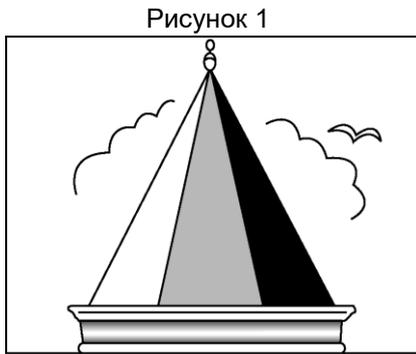
С заданием справились только 15% российских учащихся и 15% учащихся стран ОЭСР. Значительное число неверных ответов связано с неверным составлением пропорции, с ошибками при работе с единицами измерения расстояния (не учли, что расстояние в таблице дано в см, а в условии задачи в метрах), а также многочисленными вычислительными ошибками при выполнении действий с десятичными дробями.

# ВИД БАШНИ

## Вопрос 1: ВИД БАШНИ

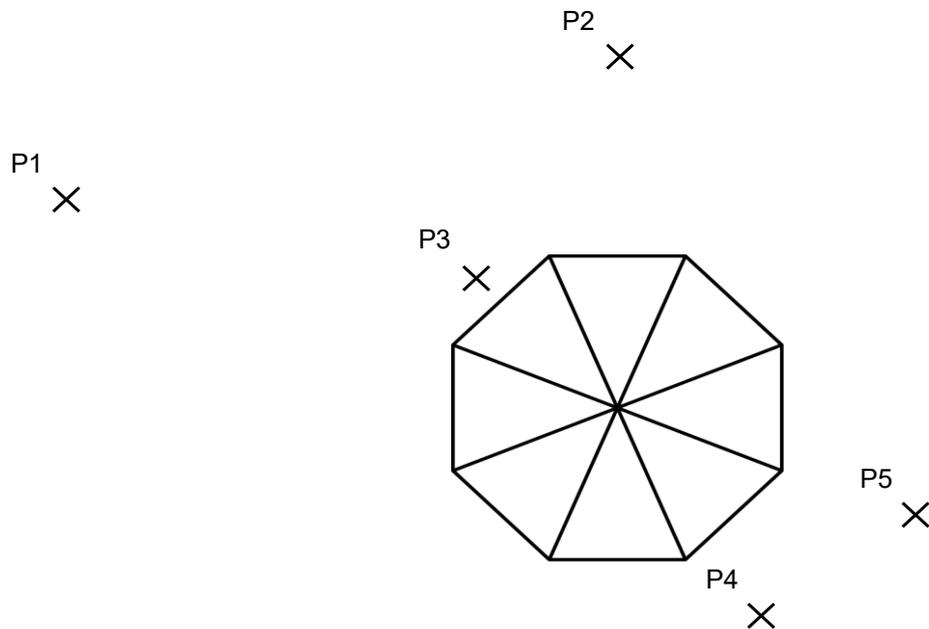
M833Q01

На рисунках 1 и 2 даны два изображения **одной и той же** башни. На рисунке 1 вы видите **три** грани крыши башни, а на рисунке 2 – **четыре** грани.



Ниже на рисунке изображен вид крыши башни сверху. Кроме того, знаком (×) показаны пять различных положений наблюдателя, обозначенных P1 – P5.

С каждой из этих позиций наблюдатель может видеть несколько граней крыши башни.



В таблице обведите число граней, которые можно видеть с каждой из этих позиций.

| Позиция | Число граней, которые можно видеть с данной позиции<br>(обведите правильное число) |   |   |   |              |
|---------|--|---|---|---|--------------|
| P1      | 1  | 2 | 3 | 4 | более, чем 4 |
| P2      | 1  | 2 | 3 | 4 | более, чем 4 |
| P3      | 1  | 2 | 3 | 4 | более, чем 4 |
| P4      | 1  | 2 | 3 | 4 | более, чем 4 |
| P5      | 1  | 2 | 3 | 4 | более, чем 4 |

### ВИД БАШНИ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### **Ответ принимается полностью**

Code 1: Для точек P1–P5 должны быть обведены соответственно числа: 4, 3, 1, 2, 2

#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

#### *Комментарии:*

Для ответа на этот совсем нестандартный вопрос нужно создать модель предложенной ситуации. В данном случае надо определить углы, ограничивающие количество видимых граней крыши башни из каждой обозначенной позиции наблюдения. Для этого надо продолжить боковые стороны треугольников, на которые разделен восьмиугольник, изображающий вид сверху 8 граней крыши башни. Образуются углы, внутрь которых попадают каждая из 5 позиций расположения наблюдателя. В этом случае наблюдатель видит столько граней, сколько из них составили угол, в который попала данная позиция наблюдения. Так, например, точка P<sub>3</sub> попадает в угол, который вмещает только 1 грань, точка P<sub>1</sub> – в угол, который вмещает 4 грани, точка P<sub>2</sub> – 3 грани, Точки P<sub>4</sub> и P<sub>5</sub> – по 2 грани.

Задание отнесено к области «Пространство и форма», вид деятельности «Формулировать». Задание вызвало затруднения у большинства учащихся. Только 28% российских и 32% учащихся стран ОЭСР справились с этим заданием. В российских учебниках нет подобных заданий, способствующих развитию пространственных представлений.

---

## ПОКУПКА КВАРТИРЫ

Это план квартиры, которую родители Гриши хотят купить в агентстве недвижимости.



---

### Вопрос 1: ПОКУПКА КВАРТИРЫ

PM00FQ01 – 0 1 9

Для оценки общей площади пола в квартире (включая террасу и стены) вы можете измерить размеры каждой комнаты, вычислить площадь каждой из них и сложить их.

Однако есть более эффективный метод, при котором для оценки общей площади пола вам нужно измерить только 4 отрезка. Укажите на данном плане **четыре** отрезка, которые нужны, чтобы оценить общую площадь пола в квартире.

### ПОКУПКА КВАРТИРЫ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Использовать пространственное мышление, чтобы показать на плане (или другим способом) минимальное количество сторон, длина которых нужна для определения площади пола.

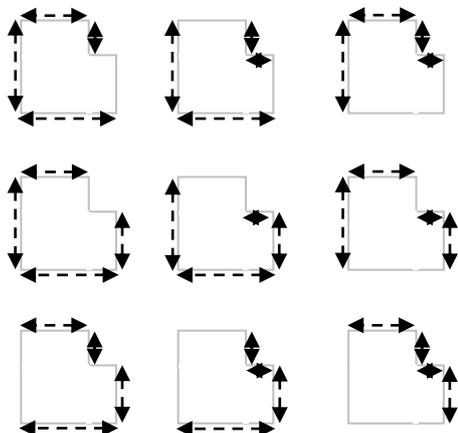
Область математического содержания: Пространство и форма

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Формулировать

**Ответ принимается полностью**

Код 1: Указаны на плане четыре измерения, необходимые для оценки площади пола в квартире. Возможны 9 способов решения, которые приведены ниже на рисунках.



- $S = (9,7 \text{ м} \cdot 8,8 \text{ м}) - (2 \text{ м} \cdot 4,4 \text{ м})$ ,  $S = 76,56 \text{ м}^2$  [Явно использованы только 4 длины и вычислена требуемая площадь.]

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

Ключевым моментом создания модели решения задачи является использование пространственного воображения для разбиения плана квартиры на фигуры, площади которых можно вычислить, используя известную формулу. Этот план можно разбить на 2 прямоугольника. Тогда, чтобы найти их площади, достаточно измерить длины двух сторон каждого из них. При этом возможны два способа вычисления площади. Первый – на плане два прямоугольника дополняют друг друга, и их площади суммируются. Второй – план можно дополнить в правом верхнем углу до большого прямоугольника, тогда из площади большого прямоугольника надо вычесть площадь дополнившего его прямоугольника. Кроме того, чтобы найти площади двух прямоугольников, используя первый или второй способ для нахождения длины одной из сторон прямоугольника, надо либо суммировать длину двух измеренных отрезков, либо вычесть.

Задание отнесено к области «Пространство и форма», представленная ситуация «Личностная», познавательная деятельность «Формулировать». Вопрос поставлен в нетрадиционной форме, поэтому вызвал затруднение у многих учащихся. С ним справились около 40% российских учащихся и около 45% учащихся стран ОЭСР.

---

## СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ КАПЕЛЬ

Внутривенные капельные вливания используются для введения жидкости и лекарств пациентам.



Для осуществления вливания медицинским сёстрам нужно вычислять скорость падения капель ( $D$ ), в каплях в минуту.

Они используют формулу  $D = \frac{k \cdot V}{60n}$ , где

$k$  – показатель «число капель в единице объёма», который измеряется в каплях в миллилитре (мл)

$V$  – объём вливания, в мл

$n$  – число часов, за которое требуется сделать вливание.

---

### Вопрос 1: СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ КАПЕЛЬ

PM903Q01 – 0 1 2 9

Медицинская сестра хочет увеличить вдвое время вливания.

Приведите точное описание того, как изменится значение  $D$ , если  $n$  **увеличить в два раза**, а  $k$  и  $V$  оставить без изменения.

.....

.....

.....

### СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ КАПЕЛЬ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Объясните эффект, который оказывает удвоение одной переменной в формуле на значение подсчитываемой величины, если другие

переменные остаются без изменения.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Профессиональный

Познавательная деятельность: Применять

### **Ответ принимается полностью**

Код 2: В объяснении описаны и направление, и величина изменения.

- Оно разделится пополам
- Оно составит половину
- $D$  будет на 50% меньше
- $D$  будет в два раза меньше

### **Ответ принимается частично**

Код 1: Ответ, в котором правильно описано либо направление, либо величина изменения, но не оба.

- $D$  станет меньше. [*Не говорится о величине изменения.*]
- Будет изменение на 50%. [*Не говорится о направлении изменения.*]
- $D$  будет на 50% больше. [*Верная величина изменения, но неверное направление изменения.*]

### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

- $D$  тоже удвоится. [*И величина, и направление изменения указаны неверно.*]

Код 9: Ответ отсутствует.

---

## **Вопрос 3: СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ КАПЕЛЬ**

PM903Q03 – 0 1 9

Медицинским сёстрам также нужно вычислять объём вливания ( $V$ ), используя скорость падения капель  $D$ .

Вливание со скоростью 50 капель в минуту надо сделать пациенту за 3 часа. Показатель «число капель в единице объёма» для данного вливания равен 25 каплям в миллилитре.

Чему равен объём вливания (в мл)?

Объём вливания: ..... мл

### **СКОРОСТЬ ПАДЕНИЯ КАПЕЛЬ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3**

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Преобразовать уравнение и подставить значения двух данных величин.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Профессиональный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: 360 или приведены верное преобразование и подстановка значений.

- 360
- $(60 \cdot 3 \cdot 50) : 25$  [верное преобразование и подстановка]

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Ключевым моментом решения задачи является работа с формулой. Можно подставить вместо  $n$  в знаменатель формулы  $2n$  и понять, что значение  $D$  надо разделить еще на 2. Значит, оно уменьшится в 2 раза. Либо применить свойство обыкновенной дроби: если знаменатель увеличить в «а раз», то значение дроби уменьшится во столько же раз.

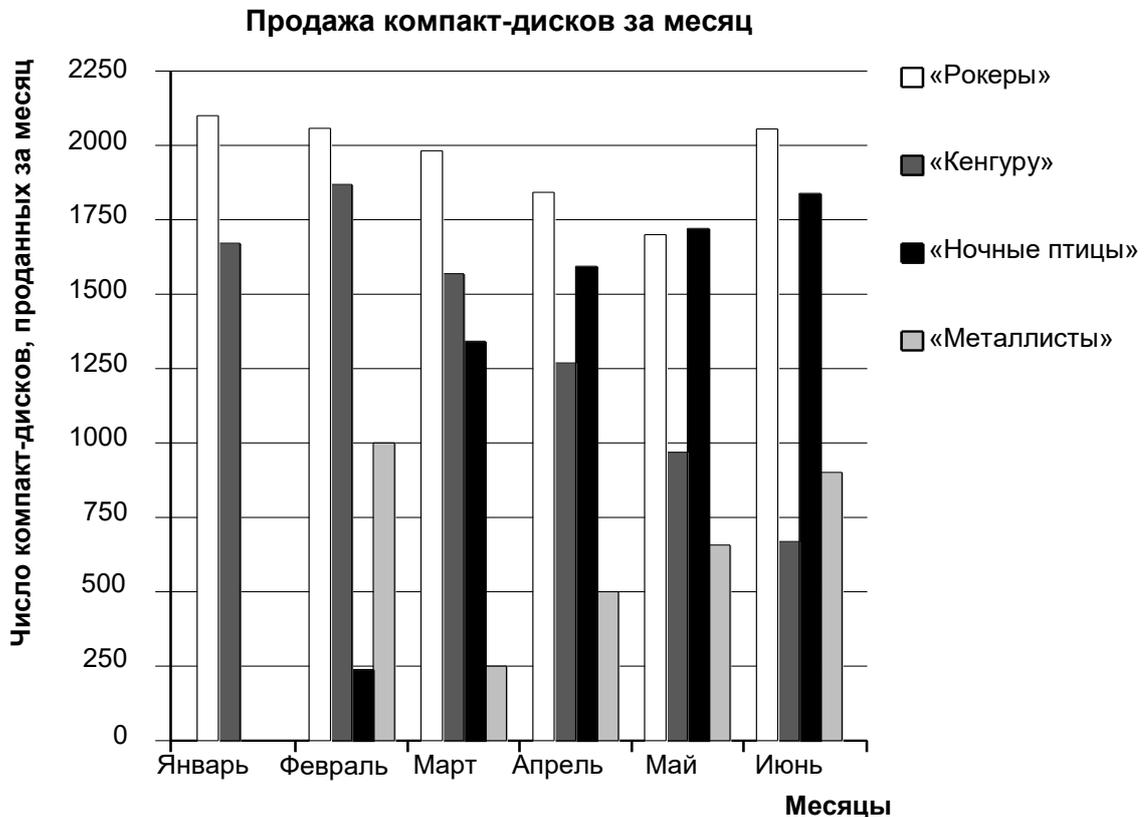
**Вопрос 2.** Ключевым моментом решения задачи является работа с формулой. Надо преобразовать формулу, выразив  $V$  через другие переменные, и подставить значения трех данных величин. При этом имеется дополнительная трудность – надо правильно определить, какие переменные принимают указанные в условии значения. В условии явно указано только, что  $D = 50$  каплям. Значит, надо обратиться к тексту в начале задания и по описанию в нем переменных понять, что  $k = 25$ , а  $n = 3$ .

Задание отнесено к области «Изменение и зависимости», представленная ситуация «Профессиональная», познавательная деятельность «Применять». Вопрос 1 поставлен в нетрадиционной форме, а знание свойств обыкновенных дробей большинство учащихся не помнит. Поэтому вопрос вызвал затруднение у многих учащихся. С ним справились около 33% российских и около 22% учащихся стран ОЭСР.

Вопрос 2 более привычен для учащихся, однако имеется трудность с определением значений переменных, поэтому результат только немного выше: у российских учащихся – 36%, у учащихся ОЭСР – 32%.

## ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ

В январе были выпущены новые компакт-диски музыкальных групп «Рокеры» и «Кенгуру». В феврале последовали компакт-диски музыкальных групп «Ночные птицы» и «Металлисты». На следующей диаграмме показана продажа этих компакт-дисков с января по июнь.



### Вопрос 1: ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ

PM918Q01

Сколько компакт-дисков музыкальная группа «Металлисты» продала в апреле?

- A 250
- B 500
- C 1000
- D 1270

## ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Читать столбчатую диаграмму

Область математического содержания: Неопределённость и данные

Контекст: Общественный

Познавательная деятельность: Интерпретировать

### **Ответ принимается полностью**

Код 1: В. 500

### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

## Вопрос 2: ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ

PM918Q02

В каком месяце музыкальная группа «*Ночные птицы*» в первый раз продала больше своих компакт-дисков, чем музыкальная группа «*Кенгуру*»?

- A Не было такого месяца
- B Март
- C Апрель
- D Май

## ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Прочитать столбчатую диаграмму и сравнить высоту двух столбцов.

Область математического содержания: Неопределённость и данные

Контекст: Общественный

Познавательная деятельность: Интерпретировать

### **Ответ принимается полностью**

Код 1: C. Апрель

### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

### Вопрос 3: ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ

PM918Q05

Менеджер группы «Кенгуру» обеспокоен тем, что количество проданных компакт-дисков уменьшилось с февраля по июнь.

Каков прогноз объёма продаж в июле, если продолжится такая же отрицательная тенденция?

- A 70 компакт-дисков
- B 370 компакт-дисков
- C 670 компакт-дисков
- D 1340 компакт-дисков

### ПРОДАЖА МУЗЫКАЛЬНЫХ ДИСКОВ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 5

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Интерпретировать столбчатую диаграмму и подсчитать число компакт-дисков, проданных в будущем, полагая, что сохранится линейная тенденция.

Область математического содержания: Неопределённость и данные

Контекст: Общественный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: В. 370 компакт-дисков

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Для ответа на вопрос 1 надо интерпретировать диаграмму: понять принятые обозначения, найти на диаграмме столбец, соответствующий группе «Металлисты», и определить его высоту.

**Вопрос 2.** Для ответа на вопрос 2 надо интерпретировать диаграмму: понять принятые обозначения, найти на диаграмме столбцы, соответствующие двум указанным группам в каждом из 6 месяцев, и сравнить их по высоте. Выполнение этих действий упрощается за счет того, что эти столбцы соседние, поэтому их легче сравнить.

**Вопрос 3.** Для ответа на вопрос 3 надо интерпретировать столбчатую диаграмму и определить количество компакт-дисков, которое будет продано в июле, полагая, что сохранится линейная тенденция уменьшения количества проданных дисков группы «Кенгуру» с февраля по июнь. Совершенно нестандартный вопрос, на который трудно было бы дать достаточно точный числовой ответ, поэтому к нему приведены варианты готовых ответов.

На диаграмме видно, что высота соответствующих столбцов уменьшается с февраля по июнь. Возможный рациональный подход к получению ответа – это учесть, что отрицательная тенденция продолжается и в июле. Поэтому достаточно определить по диаграмме количество дисков, проданных в июне (примерно 650 штук), и сравнить полученное число с вариантами готовых ответов. Тогда будет

ясно, что ответы С (670) и D (1340) явно неверные, так как они больше, чем в июне (650), а ответ А (70) слишком мал.

Возможен другой подход, когда по диаграмме находят число дисков, проданных в каждом месяце с февраля по июнь, затем вычисляют разность между двумя соседними месяцами, суммируют эти разности, делят эту сумму на 5 и получают среднее количество дисков, на которое уменьшается продажа в следующем месяце. Но это очень трудоёмкий подход, чреватый вычислительными ошибками.

Можно также справа от июня построить столбец, который будет изображать продажу дисков группы Кенгуру в июле. Затем провести прямую через вершины 5 столбцов (количество проданных дисков группой Кенгуру с февраля по июнь) и продолжить её далее до пересечения с построенным столбцом. По вертикальной оси можно увидеть, что пересечение столбца будет на высоте между 500 и 250. Сравнение с готовыми ответами покажет, что верный ответ В.

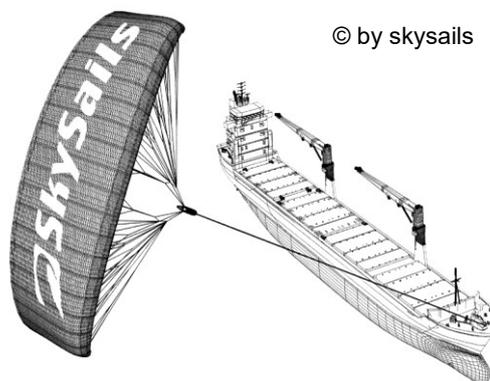
Задание отнесено к области *«Неопределенность и данные»*, представленная ситуация *«общественная»*, познавательная деятельность *«интерпретировать»*. Это задание может служить примером, как его составители добились повышения сложности вопросов. Вопрос 1 традиционный, доступный для учащихся 4-5 класса, и поэтому результат достаточно высокий – российские учащиеся 89%, учащиеся стран ОЭСР – 87%. Вопрос 2 сложнее, требует выполнения нескольких действий, поэтому и результаты несколько ниже: российские учащиеся – 72%, учащиеся стран ОЭСР – 80%. Вопрос 3 совершенно нестандартный, требует самостоятельной разработки способа решения. Видимо, большинство учащихся опирались на рассуждения, подобные приведенным выше, и на варианты готовых ответов, поэтому результаты достаточно высокие: российские учащиеся – 72%, учащиеся стран ОЭСР – 77%.

---

## ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ

Девяносто пять процентов товаров в мире перевозят по морю примерно 50 000 танкеров, грузовых кораблей и контейнеровозов. Большинство этих кораблей используют дизельное топливо.

Инженеры планируют разработать поддержку кораблей, используя силу ветра. Их предложение заключается в прикреплении к кораблям кайтов (парящих в воздухе парусов) и использовании силы ветра, чтобы уменьшить расход дизельного топлива и его влияние на окружающую среду.



---

### Вопрос 1: ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ

PM923Q01

Одно из преимуществ использования кайта заключается в том, что он летает на высоте в 150 м. Там скорость ветра примерно на 25% больше, чем на уровне палубы корабля.

С какой примерно скоростью дует ветер на кайт, когда скорость ветра, измеренная на палубе корабля, равна 24 км/ч?

- A 6 км/ч
- B 18 км/ч
- C 25 км/ч
- D 30 км/ч
- E 49 км/ч

### ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Применить вычисления с процентами в рамках данной ситуации в реальном мире.

Область математического содержания: Количество

Контекст: Научный

Познавательная деятельность: Применять

#### **Ответ принимается полностью**

Код 1: D. 30 км/ч

#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

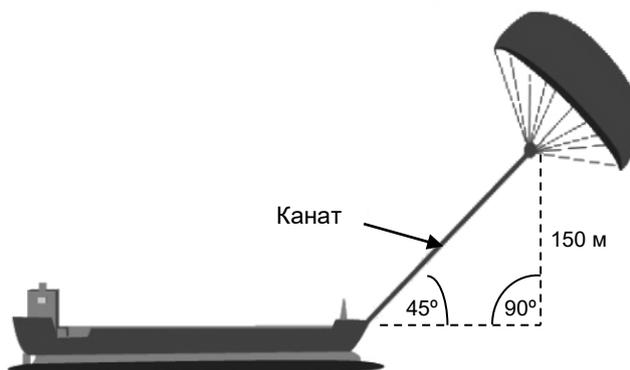
Код 9: Ответ отсутствует.

## Вопрос 2: ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ

PM923Q03

Чему примерно должна быть равна длина каната у кайта, чтобы он тянул корабль под углом в  $45^\circ$  и находился на высоте в 150 м по вертикали, как показано на рисунке?

- A 173 м
- B 212 м
- C 285 м
- D 300 м



Примечание: Рисунок сделан не в масштабе.  
© by skysails

## ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3

### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Использовать теорему Пифагора в рамках геометрического содержания реальной ситуации.

Область математического содержания: Пространство и форма

Контекст: Научный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: В. 212 м

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

### Вопрос 3: ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ

PM923Q04 – 0 1 9

Из-за высокой стоимости дизельного топлива в 0,42 зедра за литр хозяева корабля «Новая волна» думают о том, чтобы снабдить свой корабль кайтом.

Подсчитано, что подобный кайт даёт возможность уменьшить расход дизельного топлива на 20%.

|   |  |
|---|--|
| Название: «Новая волна»   |  |
| Тип: фрахтовое судно (сдаётся в наём)   |  |
| Длина: 117 метров   |  |
| Ширина: 18 метров   |  |
| Грузоподъёмность: 12 000 тонн   |  |
| Максимальная скорость: 19 узлов   |  |
| Расход дизельного топлива за год без использования кайта: примерно 3 500 000 литров |  |

Стоимость установки на «Новой волне» кайта составляет 2 500 000 зедов.

Через сколько примерно лет экономия на дизельном топливе покроет стоимость установки кайта? Приведите вычисления, подтверждающие ваш ответ.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Количество лет:.....

### ПАРУСНЫЕ КОРАБЛИ ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 4

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Решить ситуацию в реальном мире, включающую экономию затрат и расхода топлива.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Научный

Познавательная деятельность: формулировать

**Ответ принимается полностью**

Код 1: Ответ от 8 до 9 лет сопровождается соответствующими (математическими) вычислениями.

- Расход дизельного топлива за год без паруса: 3,5 миллионов литров, цена 0,42 зед/литр, стоимость дизельного топлива без паруса 1 470 000 зедов. Если 20% экономит парус, то это приводит к экономии  $1\,470\,000 \cdot 0,2 = 294\,000$  зедов за год. Таким образом,  $2\,500\,000 / 294\,000 \approx 8,5$ , т.е.: после 8-9 лет парус станет (финансово) выгодным.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Российские учащиеся выбрали следующие варианты ответа на данный вопрос:

- |             |  |
|-------------|--|
| A 6 км/ч    | – 16% (ошибка – нашли 25% вместо 125% от 24 км/ч)                            |
| B 18 км/ч   | – 6% (ошибка – нашли 100% – 25% = 75% от 24 км/ч)                            |
| C 25 км/ч   | – 8% (ошибка – не поняли условие задачи)                                     |
| D 30 км/ч * | – 57% ( $24 \cdot 1,25 = 30$ км/ч ИЛИ 25% от 24 равно 6, $24 + 6 = 30$ км/ч) |
| E 49 км/ч   | – 3% (невнимательно прочли условие задачи, сложили 24 км/ч и 25%)            |

Не дали ответ на вопрос 3% российских учащихся.

Ключевой момент решения – нахождение процентов числа. Задание стандартное, доступно учащимся 5-6 класса. Затруднение вызывает большой текст в описании ситуации, из которого не требуется информация для ответа на данный вопрос. Основные ошибки (ответы А, В, С) заключаются в невнимательном анализе условия задачи, а также в нетвердом знании алгоритмов решения задач на проценты.

Задание отнесено к области «Количество», представленная ситуация «научная», познавательная деятельность «Применять». Результаты невысоки: российские учащиеся – 57%, учащиеся стран ОЭСР – 60%.

**Вопрос 2.** Российские учащиеся выбрали следующие варианты ответа на данный вопрос:

- |           |       |
|-----------|-------|
| A 173 м   | – 15% |
| B 212 м * | – 45% |
| C 285 м   | – 18% |
| D 300 м   | – 18% |

Не дали ответ на вопрос 4% российских учащихся.

Ключевым моментом для решения этой задачи является применение известной теоремы Пифагора для вычисления длины искомого отрезка, а также знание известного свойства равенства катетов в прямоугольном равнобедренном треугольнике (с углом в  $45^\circ$ ). Решение задачи упрощает наличие чертежа, на котором хорошо представлена имеющаяся ситуация и соответствующие данные из условия задачи, а также приведенные варианты ответов. Однако подобных заданий нет в учебниках, форма представления условия задачи совершенно непривычная, поэтому вызвала затруднения у большинства учащихся. Решение: Канат

$=\sqrt{150^2 + 150^2} \approx 212,13$ . Сообразуясь с вариантами готовых ответов, следует выбрать ответ В (212).

Задание отнесено к области «*Пространство и форма*», представленная ситуация «*научная*», познавательная деятельность «*Применять*». Результаты невысоки: российские учащиеся – 45%, учащиеся стран ОЭСР – 50%.

**Вопрос 3.** Это текстовая задача в 3-4 вопроса. В исследовании она отнесена к высшему уровню сложности. Требуется создать модель её решения, применить алгоритм решения задач на проценты и выполнить арифметические действия с многозначными числами. Полученный приближенный ответ (8,5 лет) округлить, учитывая условие задачи. Знания и умения, необходимые для получения ответа формируются в 5-6 классах. В исследовании разрешается использовать калькулятор, что позволяет упростить процесс вычислений и сэкономить время.

Задача отнесена к области «*Изменение и зависимости*», контекст «*научный*», познавательная деятельность «*Формулировать*». Подобных задач нет в российских учебниках. Сложность задачи определяется наличием большого текста, в котором много лишней словесной и количественной информации. Информация представлена в различной форме: в виде текста, количественных данных и рисунков. Данные, нужные для решения, надо извлечь из разных частей текста, в котором имеется количественная информация, ненужная для решения данной задачи. Поэтому неудивительно, что результаты выполнения этого задания невысоки: российские учащиеся – 16%, учащиеся стран ОЭСР – 15%, максимальный результат у лидирующих стран – 47%.

Задача была бы посильной для российских учащихся 5-6 класса, если бы она была сформулирована в привычной для них редакции, как это делается в российских учебниках: За год двигатель на корабле потребляет 3500000 л топлива, 1 литр топлива стоит 0,42 р. Установка паруса на корабле стоит 2500000 р. Парус экономит 20% топлива. Через сколько лет экономия топлива покроет стоимость установки паруса?

## СОУС

### Вопрос 2: СОУС

PM924Q02 – 0 1 9

Вы делаете свою собственную заправку для салата.

Вот рецепт на 100 миллилитров (мл) заправки.

|                 |       |
|-----------------|-------|
| Салатное масло: | 60 мл |
| Уксус:          | 30 мл |
| Соевый соус:    | 10 мл |

Сколько миллилитров (мл) салатного масла понадобится, чтобы сделать 150 мл этой заправки?

Ответ: ..... мл

### СОУС: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Применить понятие пропорционального отношения в повседневной жизненной ситуации для вычисления количества одного ингредиента, требуемого в рецепте.

Область математического содержания: Количество

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Формулировать

#### **Ответ принимается полностью**

Код 1: 90

#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

- В 1,5 раза больше. [Требуется вычислить необходимое количество.]

Код 9: Ответ отсутствует.

#### *Комментарии:*

Это стандартная арифметическая задача на пропорциональные величины. Она доступна учащимся 5-6 класса, которым известен способ её решения. Однако при изучении курсов алгебры в 7-9 классов учащиеся с подобными задачами не встречаются. При изучении курса геометрии в 7-9 классах им приходится иметь дело с пропорциональным отношением сторон в подобных треугольниках, составлять и решать соответствующие пропорции. Однако перенести этот опыт на типичную арифметическую задачу большинство учащихся не смогло. Могла вызвать дополнительные затруднения необходимость выбрать нужные данные из таблицы.

Задача отнесена к области «Количество», контекст «личный», познавательная деятельность «Формулировать». Результаты её выполнения невысоки: российские учащиеся – 58%, учащиеся стран ОЭСР – 64%. Максимальный результат у лидирующих стран – 85%.

---

# ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ

Гора Фудзи – знаменитый бездействующий вулкан в Японии.



---

## Вопрос 1: ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ

PM942Q01

Гора Фудзи ежегодно открыта для подъёма людей только с 1 июля по 27 августа включительно. В течение этого времени на гору Фудзи поднимаются около 200 000 людей.

Сколько примерно в среднем людей поднимаются на гору Фудзи каждый день?

- A 340
- B 710
- C 3400
- D 7100
- E 7400

## ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Определить среднюю ежедневную норму на основе общего количества и установленного периода времени (приведённые данные).

Область математического содержания: Количество

Контекст: Общественный

Познавательная деятельность: Формулировать

**Ответ принимается полностью**

Код 1: С. 3400

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

## Вопрос 2: ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ

PM942Q02 – 0 1 9

Пешеходная тропа Готемба на гору Фудзи имеет длину около 9 километров.

Пешеходам нужно вернуться после 18 км прогулки к 20 часам.

Тоши прикинул, что он может подняться на гору со средней скоростью 1,5 км/ч и спуститься со скоростью в два раза больше этой. При движении с этими скоростями остаётся время на то, чтобы поесть и отдохнуть.

Используя скорости, установленные Тоши, определите самое позднее время, когда Тоши может начать свой подъём, чтобы он мог вернуться к 20 ч.

.....

### ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Вычислить время начала прогулки, если даны две различных скорости, общее расстояние для прогулки и время возвращения.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Общественный

Познавательная деятельность: Формулировать

#### **Ответ принимается полностью**

Код 1: 11 (ч) *[Единицы измерения могут быть указаны или не указаны. Допускается эквивалентный способ записи времени, например, 11:00.]*

#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

### Вопрос 3: ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ

PM942Q03 – 0 1 2 9

Тоши надел шагомер для подсчёта своих шагов во время ходьбы по тропе Готемба.

Его шагомер показал, что он сделал 22 500 шагов по дороге наверх.

Оцените среднюю длину шага у Тоши, пока он шёл 9 км вверх по тропе Готемба. Дайте ответ в сантиметрах (см).

Ответ: ..... см

### ПОДЪЁМ НА ГОРУ ФУДЗИ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Разделить длину, данную в километрах, на определенное число и выразить частное в сантиметрах.

Область математического содержания: Количество

Контекст: Общественный

Познавательная деятельность: Применять

#### **Ответ принимается полностью**

Код 2: 40

#### **Ответ принимается частично**

Код 1: Ответы, полученные в результате неверного перевода в сантиметры, в которых в одном из разрядов стоит цифра 4.

- 0,4 [Ответ указан в метрах].
- 4000 [Неверный перевод единиц].

#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

#### *Комментарии:*

**Вопрос 1.** Ключевым моментом решения является правильное определение количества дней, которые открыты для подъёма на гору. Большинство – 80% – верно проанализировали условие и верно определили количество дней (58 дней). 70% дали верный ответ, а 10% допустили ошибку при делении. Около 16% учащихся использовали только 27 дней – число дней в августе, указанных в условии.

Задание отнесено к содержательной области «Количество», так как это несложная арифметическая задача. Однако из-за отсутствия необходимой информации приходится создать модель решения, поэтому по характеру познавательной деятельности задание отнесено к когнитивной области «Формулировать». В задаче приходится иметь дело с ситуацией, связанной с жизнью общества, поэтому контекст считается «общественным».

**Вопрос 2.** По характеру – это задача на движение, в условии которой имеется вся информация, нужная для решения. Используя известные длину тропы и скорости при подъёме и при спуске, надо определить время, необходимое для подъёма и спуска, и суммировать их. Затем найти разность между полученной суммой затраченного времени и 20 часами.

*Решение:*  $9 : 1,5 + 9 : 1,5 \cdot 2 = 9$  (ч);  $20 - 9 = 11$  (ч)

Однако задача вызвала затруднение у большинства 15-летних учащихся. С ней справились только 23% участников исследования, причем 38% не дали никакого ответа. Очевидно, что вызывает затруднение нестандартный вопрос, который требует определить самое позднее время выхода на тропу. Кроме того, неясно, надо ли учитывать время на еду и отдых при подъёме и спуске, о чём говорится в описании ситуации.

Думается, что эта особенность задания послужила причиной, вызвавшей затруднения у некоторых учащихся. Если бы от учащихся требовалось привести решение, то при его записи можно было бы дать объяснение полученного ответа, сказав, например, что в 9 ч входит время на еду и отдых, или, наоборот, прибавить какое-то время на это. Однако авторы задания требуют привести только числовой ответ, поэтому для некоторых учащихся неясность требования вопроса к задаче остается.

Решение задачи требует рассмотрения зависимостей между расстоянием, скоростью и временем, и поэтому задание отнесено к содержательной области *«Изменение и зависимости»*. Постановка вопроса нестандартная, явно требуется перейти от реальной ситуации к её математическому аналогу. Значит, требуется создать модель решения и по характеру познавательной деятельности отнести задание к когнитивной области *«Формулировать»*. Так как приходится иметь дело с ситуацией, связанной с жизнью общества, то контекст задания считается *«общественным»*.

**Вопрос 3.** С заданием полностью справились только 21% российских учащихся. 11% верно выполнили деление, но либо дали ответ не в сантиметрах, либо допустили ошибки при переводе полученного ответа в сантиметры. 23% учащихся не дали никакого ответа.

При решении приходится иметь дело только с данными числами, поэтому задание отнесено к содержательной области *«Количество»*. Так как нужно было использовать известный алгоритм деления десятичных дробей, то по характеру когнитивная деятельность отнесена к категории *«Применять»*. Ситуация, описанная в задании, связана с жизнью общества, и считается *«общественной»*.

---

## ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА



Елена только что приобрела новый велосипед. У него есть спидометр, который закреплён на руле.

Спидометр показывает расстояние, которое Елена проехала, и среднюю скорость её поездки.

---

### Вопрос 1: ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА

PM957Q01

В одной из поездок Елена сначала проехала 4 км за 10 минут, а затем ещё 2 км за следующие 5 минут.

Какое из следующих утверждений верно?

- A Средняя скорость Елены была больше в первые 10 минут, чем в последующие 5 минут.
- B Средняя скорость Елены была одинаковой в первые 10 минут и в последующие 5 минут.
- C Средняя скорость Елены была меньше в первые 10 минут, чем в последующие 5 минут.
- D Невозможно ничего сказать о средней скорости Елены на основе имеющейся информации.

### ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Сравнить средние скорости для данных расстояний и времени поездок.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: В. Средняя скорость Елены была одинаковой в первые 10 минут и в следующие 5 минут.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 2: ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА**

PM957Q02

Елена проехала 6 км до дома своей тёти. Спидометр показал, что в среднем она ехала со скоростью 18 км/ч во время всей поездки.

Какое из следующих утверждений верно?

- A У Елены ушло 20 минут, чтобы доехать до дома тёти.
- B У Елены ушло 30 минут, чтобы доехать до дома тёти.
- C У Елены ушло 3 часа, чтобы доехать до дома тёти.
- D Невозможно сказать, сколько времени ушло у Елены, чтобы доехать до дома тёти.

**ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2**

**ЦЕЛЬ ВОПРОСА:**

Описание: Вычислить время поездки для данных средней скорости и расстояния.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: А. У Елены ушло 20 минут, чтобы доехать до дома тёти.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

### Вопрос 3: ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА

PM957Q03 – 0 1 9

Елена из дома поехала на велосипеде на реку, которая находится в 4 км. У неё ушло 9 минут. Она поехала домой по более короткому пути в 3 км. Дорога заняла у неё только 6 минут.

Какова была средняя скорость Елены (в км/ч) во всей поездке на реку и обратно?

Средняя скорость поездки: ..... км/ч

### ВЕЛОСИПЕДИСТКА ЕЛЕНА: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Вычислить среднюю скорость двух поездок, если даны два расстояния и потраченное время.

Область математического содержания: Изменение и зависимости

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Применять

#### **Ответ принимается полностью**

Код 1: 28.

#### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

- 28,3 [Использован неправильный метод: вычислено среднее значение скоростей в двух поездках (26,67 и 30).]

Код 9: Ответ отсутствует.

#### *Комментарии:*

**Вопрос 1.** Ответ на вопрос можно получить с помощью разных подходов. Например, самый простой и быстрый – обратить внимание на то, что отношение пути и времени одинаковые на этих участках пути. Это означает, что скорости на них равны. Можно также вычислить скорости на каждом участке и увидеть, что они одинаковые (0,4 км/ч). Так как не требуется приводить решение, то способ, использованный учеником, не оценивается. Задание невысокого уровня сложности и с ним справились 78% российских учащихся. Тем не менее, почти 20% не смогли разобраться в ситуации, доступной учащимся 5-6 класса.

При выполнении задания приходится иметь дело с зависимостями между путем, скоростью и временем, поэтому вопрос отнесен к категории «*Изменение и зависимости*», а рассматриваемая ситуация отнесена к «*личностной*». Для получения ответа надо либо найти отношение величин, либо использовать формулу нахождения скорости по известным пути и времени, поэтому познавательная деятельность отнесена к категории «*Применять*».

**Вопрос 2.** Для ответа на вопрос можно использовать разные способы. Например, найти время, которое ушло у Елены, –  $6 : 18 = 1/3$  (ч) или 20 мин. Можно опираться на смысл понятия скорости и отношение пути и времени. Так, 18 км/ч – расстояние, которое проедет Елена за 1 ч или за 60 мин. 6 км составляют треть этого расстояния, значит, она его проедет за треть часа или за 20 мин.

Задание считается невысокого уровня сложности, однако только около половины российских учащихся (53%) справились с ним. Выбор неверных ответов В и С говорит о том, что эти учащиеся вместо деления пути на скорость выполнили деление скорости на пройденное расстояние. Возможно, что это объясняется невнимательным анализом условия задания, простотой деления 18 на 6 и наличием предложенных ответов В и С.

Как и в первом вопросе, здесь надо использовать зависимость между путем, скоростью и временем, поэтому вопрос отнесен к категории *«Изменение и зависимости»*, а рассматриваемая ситуация отнесена к *«личностной»*. Для получения ответа надо использовать формулу нахождения времени по известным пути и скорости, поэтому познавательная деятельность отнесена к категории *«Применять»*.

**Вопрос 3.** Этот вопрос считается в исследовании одним из самых сложных тестовых заданий. Прежде всего, он требует более глубокого понимания понятия средней скорости, связывая его со всем пройденным расстоянием за все время в пути. То есть требуется понимание математического понятия и его реализации в жизненной ситуации, что приводит к более высоким требованиям к математизации предложенной ситуации, соответствующим рассуждениям, а также к использованию символического, формального, технического языка и действий.

*Возможное решение:*

1)  $(4 + 3) : (9 + 6) = 7/15$  км/мин,  $7/15 \cdot 60 = 28$  км/ч.

2)  $4 + 3 = 7$  км,  $9 + 6 = 15$  мин, 15 мин – это четверть часа, значит, скорость в км/ч –  $7 \cdot 4 = 28$  км/ч.

Многие учащиеся недостаточно усвоили смысл данного понятия и ошибочно нашли среднюю скорость, суммируя полученные ими в отдельности скорости на двух участках пути и поделив сумму пополам. Поэтому неудивительно, что только 14% российских учащихся справились полностью с этим заданием, а 13% не дали никакого ответа.

Как и в двух первых вопросах, здесь надо использовать зависимость между путем, скоростью и временем, поэтому вопрос отнесен к категории *«Изменение и зависимости»*, а рассматриваемая ситуация отнесена к *«личностной»*. Для получения ответа надо использовать формулу нахождения скорости по известным пути и времени, поэтому познавательная деятельность отнесена к категории *«Применять»*.

Следует обратить внимание на то, какими средствами разработчики данного задания добиваются повышения трудности включенных в него вопросов. При ответе на каждый из этих вопросов требуется использовать зависимость между тремя величинами, характеризующими движение. Однако в первом вопросе надо только сравнить два отношения пути и времени. Во втором вопросе надо, используя расстояние и скорость, найти затраченное время и выполнить перевод единиц времени (минуты в часы). В третьем вопросе явно требуется более глубокое понимание смысла понятия средней скорости, применив его к двум участкам пути.

---

## КАКАЯ МАШИНА?

Кристина только что получила водительские права и хочет купить себе первую машину.



В приведённой ниже таблице указаны сведения о четырёх машинах, которые она нашла у местного продавца машин.

| Модель:                           | Альфа   | Бета    | Гамма   | Дельта  |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|
| Год выпуска                       | 2003    | 2000    | 2001    | 1999    |
| Объявленная цена (зеды)           | 4800    | 4450    | 4250    | 3990    |
| Пройденное расстояние (километры) | 105 000 | 115 000 | 128 000 | 109 000 |
| Объём двигателя (литры)           | 1,79    | 1,796   | 1,82    | 1,783   |

---

### Вопрос 1: КАКАЯ МАШИНА?

PM985Q01

Кристина хочет машину, которая отвечает **всем** следующим условиям:

- Пройденное расстояние **не** больше, чем 120 000 километров.
- Сделана в 2000 году или позже.
- Объявленная цена **не** выше, чем 4500 зедов.

Какая машина отвечает условиям Кристины?

- A Альфа
- B Бета
- C Гамма
- D Дельта

### КАКАЯ МАШИНА?: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Выбрать величину, которая отвечает всем четырём числовым условиям /утверждениям в ситуации, связанной с финансами.

Область математического содержания: Неопределённость и данные

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Интерпретировать

**Ответ принимается полностью**

Код 1: В. Бета.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 2: КАКАЯ МАШИНА?**

PM985Q02

У какой машины наименьший объём двигателя?

- A Альфа
- B Бета
- C Гамма
- D Дельта

**КАКАЯ МАШИНА?: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2**

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Выбрать наименьшую десятичную дробь среди четырёх с учётом данной ситуации.

Область математического содержания: Количество

Контекст: Личный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: D. Дельта.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

---

**Вопрос 3: КАКАЯ МАШИНА?**

PM985Q03 – 0 1 9

Кристине придётся заплатить дополнительно 2,5% от объявленной цены машины в качестве налога.

Сколько зедов составляет дополнительный налог на машину Альфа?

Дополнительный налог в зедах: .....

**КАКАЯ МАШИНА?: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3**

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Вычислить 2,5% от значения величины, данного в тысячах, в финансовой ситуации.

Область математического содержания: Количество  
Контекст: Личный  
Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: 120.

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.  
• 2,5% от 4800 зедов [Должен быть получен ответ.]

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** При выборе машины требуется выполнить три условия. Чтобы это сделать, надо свободно читать данные, приведенные в соответствующих строках и столбцах таблицы. Эти данные надо соотносить с указанными числовыми условиями, чтобы выбрать машину, которая одновременно отвечает всем этим условиям. Задание несложное для 15-летних учащихся, поэтому не удивляет, что с ним справились 87% российских учащихся. Выбор того или иного из неверных ответов объясняется тем, что не было учтено одно из трех условий.

Задание связано с работой с данными, поэтому оно отнесено к содержательной области «*Неопределенность и данные*». Для его выполнения надо, применив базовые умения по чтению данных таблицы, перейти на основе понимания этих данных к решению вопроса, возникшего в реальной ситуации. Поэтому преобладающая познавательная деятельность отнесена к категории «*Интерпретировать*». По своему характеру описанная в задании ситуация явно относится к «*личностным*», так как многим людям приходится иметь дело с покупкой машины и принимать решение о выборе, опираясь на те или иные критерии.

**Вопрос 2.** Этот несложный вопрос вызвал затруднения почти у трети российских учащихся. Для получения ответа требуется с учетом данной ситуации из четырех десятичных дробей выбрать наименьшую. Результаты международных и национальных мониторингов неоднократно показывали, что значительная часть 15-летних учащихся не обладает прочным умением сравнивать десятичные дроби с двумя и более десятичными знаками. Поэтому не удивительно, что верный ответ дали около 70% российских учащихся и около 30% выбрали неверные ответы.

Для выполнения задания требуются умения, формируемые в курсе арифметики, поэтому задание отнесено к содержательной области «*Количество*», а познавательная деятельность – к категории «*Применять*». Ситуация, как в первом вопросе, относится к категории «*личностная*».

**Вопрос 3.** Этот несложный вопрос вызвал затруднения почти у 40% российских учащихся. Для его выполнения надо найти 2,5% процента от известной цены машины. К сожалению, многие российские учащиеся не обладают прочным умением решать задачи на проценты.

Для выполнения задания требуются умения, формируемые в курсе арифметики, поэтому задание отнесено к содержательной области «*Количество*», а познавательная деятельность – к категории «*Применять*». Ситуация, как в первом вопросе, относится к категории «*личностная*».

---

# ГАРАЖ

«Базовый» ассортимент производителя гаражей включает в себя модели только с одним окном и одной дверью.

Дима выбирает следующую модель из «базового» ассортимента. На ней показано расположение окна и двери.



---

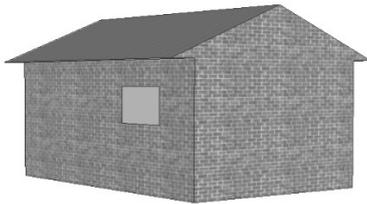
## Вопрос 1: ГАРАЖ

PM991Q01

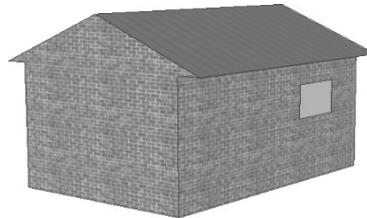
На приведённых ниже рисунках показано, как разные «базовые» модели выглядят сзади. Только один из этих рисунков соответствует модели, выбранной Димой.

Какую модель выбрал Дима? Обведите А, В, С или D.

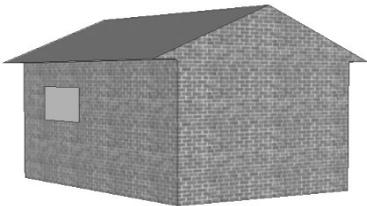
**A**



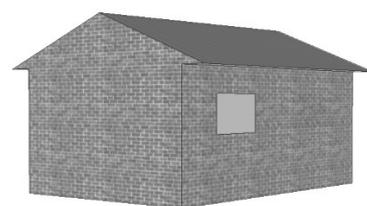
**B**



**C**



**D**



## ГАРАЖ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Использовать пространственное воображение, чтобы определить трёхмерную фигуру, соответствующую другой данной трёхмерной фигуре.

Область математического содержания: Пространство и форма

Контекст: Профессиональный

Познавательная деятельность: Интерпретировать

### **Ответ принимается полностью**

Код 1: С [Рисунок С]

### **Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

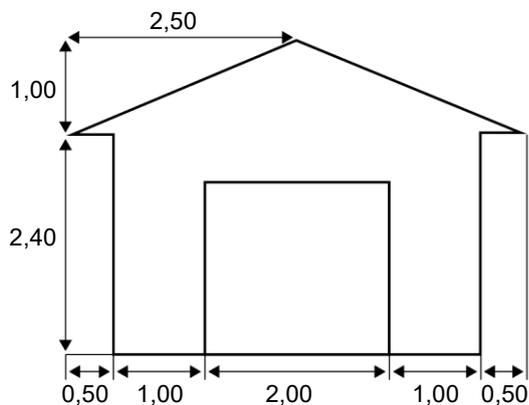
Код 9: Ответ отсутствует.

---

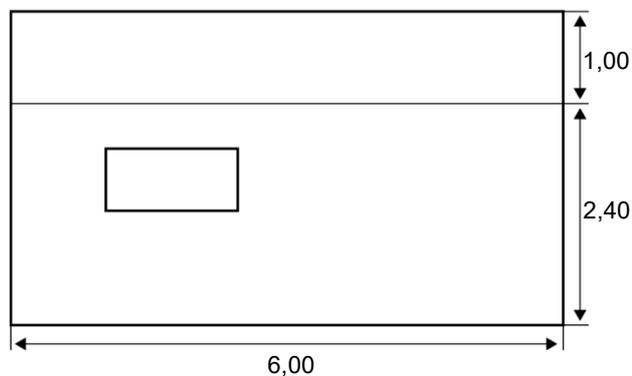
## Вопрос 2: ГАРАЖ

PM991Q02 – 00 11 12 21 99

На двух приведённых ниже планах показаны размеры (в метрах) гаража, выбранного Димой.



Вид спереди



Вид сбоку

Замечание: Планы изображены не в масштабе.

Крыша сделана из двух одинаковых прямоугольных секций.

Вычислите площадь **всей** крыши. Приведите решение.

.....

.....

.....

.....

## ГАРАЖ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Интерпретировать план и вычислить площадь прямоугольника, используя теорему Пифагора или измерение.

Область математического содержания: Пространство и форма

Контекст: Профессиональный

Познавательная деятельность: Применять

### **Ответ принимается полностью**

Код 21: Любые значения от 31 до 33, не сопровождаемые никаким решением или сопровождаемые решением, которое показывает использование теоремы Пифагора (или включает элементы, которые демонстрируют, что был использован этот метод). *[Не требуется приводить единицы измерения (м<sup>2</sup>)]*.

- $12 \cdot 2,6 = 31,2$
- $12\sqrt{7,25} \text{ м}^2$
- $12 \cdot 2,69 = 32,28 \text{ м}^2$
- $12 \cdot 2,7 = 32,4 \text{ м}^2$

### **Ответ принимается частично**

Код 11: Решение показывает верное использование теоремы Пифагора, но в нём сделана вычислительная ошибка или использована неверная длина или полученная площадь не удвоена.

- $2,5^2 + 1^2 = 6$ ;  $12 \cdot \sqrt{6} = 29,39$  *[Верно использована теорема Пифагора, но сделана вычислительная ошибка]*.
- $2^2 + 1^2 = 5$ ;  $2 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} = 26,8 \text{ м}^2$  *[Использована неверная длина]*.
- $6 \cdot 2,6 = 15,6$  *[Не удвоена площадь крыши]*.

Код 12: Решение не показывает использование теоремы Пифагора, но в нём использовано разумное значение для ширины крыши (например, любое значение от 2,6 до 3) и последующие вычисления выполнены верно.

- $2,75 \cdot 12 = 33$
- $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$

### **Ответ не принимается**

Код 00: Другие ответы.

- $2,5 \cdot 12 = 30$  *[Оценка ширины крыши взята вне принимаемых пределов от 2,6 до 3]*.

- $3,5 \cdot 6 \cdot 2 = 42$  [Оценка ширины крыши взята вне принимаемых пределов от 2,6 до 3].

Код 99: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Для ответа на вопрос требуется на основе вида строения «спереди» определить его вид «сзади». То есть надо интерпретировать рисунки по отношению к реальному объекту. Очевидно, что для выполнения задания некоторые учащиеся могут мысленно поворачивать данный объект, используя пространственное воображение. Другие будут анализировать расположение деталей данного трёхмерного строения на каждом из приведенных на рисунках альтернатив, мысленно соотнося с изображением этого строения «спереди». Возможны и другие способы получения ответа. Подобных заданий нет в наших учебниках. Тем не менее, подавляющее большинство (80%) российских учащихся справилось с ним.

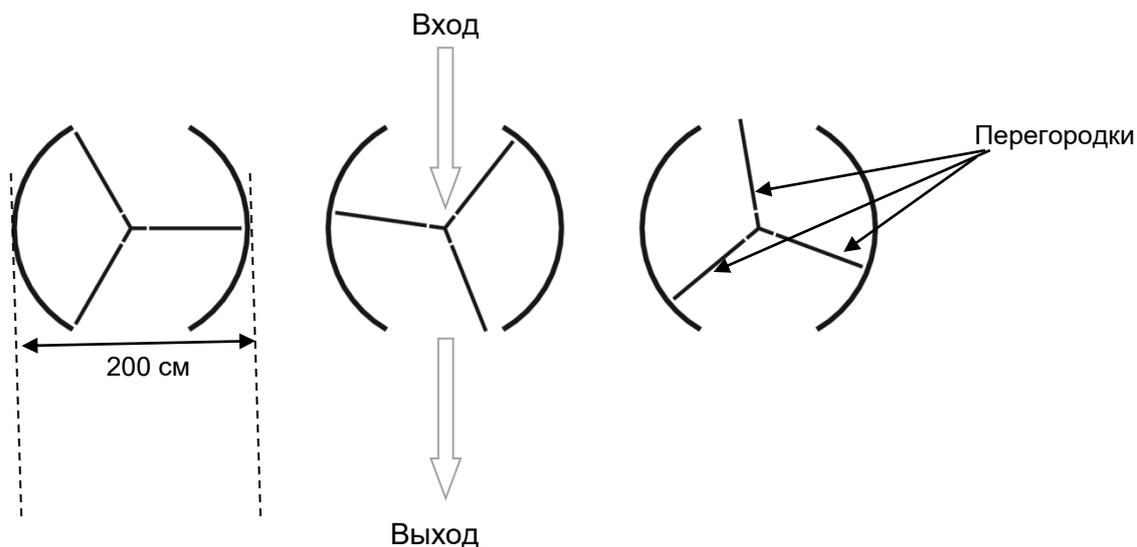
Этот вопрос относится к категории «*Пространство и форма*», так как приходится иметь дело с пространственными фигурами. По характеру познавательной деятельности его следует отнести к категории «*Интерпретировать*», а представленную ситуацию – к «*профессиональной*».

**Вопрос 2.** Данное задание отнесено к самому высокому уровню трудности. Для его выполнения надо извлечь необходимую информацию, представленную на двух приведенных планах строения («спереди» и «сбоку»), то есть определить размеры крыши. Кроме того, составить правильное представление о форме крыши, которая состоит из двух одинаковых скатов. Поэтому неудивительно, что с заданием полностью справились только 12% российских учащихся, еще 2% дали частично верный ответ, а 36% – не дали никакого ответа.

При ответе на вопрос требуется проявить умение читать планы трёхмерных объектов, находить значения геометрических величин для ответа на вопрос, который может возникнуть при строительстве объекта, например, при его окраске. Поэтому по содержанию задание отнесено к категории «*Пространство и форма*», а представленная ситуация – к «*профессиональной*». Для выполнения задания надо вычислить значения некоторых геометрических величин, используя при этом теорему Пифагора и формулу площади прямоугольника, поэтому по своему характеру познавательная деятельность отнесена к категории «*Применять*».

## ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ

Вращающаяся дверь имеет три стеклянные перегородки, которые вместе с этой дверью вращаются внутри кругового пространства. Внутренний диаметр этого пространства 2 метра (200 сантиметров). Три дверные перегородки делят пространство на три равных сектора. Ниже на плане показаны дверные перегородки в трёх разных позициях, если смотреть на них сверху.



### Вопрос 1: ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ

PM995Q01 – 0 1 9

Чему равна в градусах величина угла между двумя дверными перегородками?

Величина угла: ..... °

### ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 1

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Вычислить центральный угол сектора круга.

Область математического содержания: Пространство и форма

Контекст: Научный

Познавательная деятельность: Применять

**Ответ принимается полностью**

Код 1: 120 [примите также угол, равный 240].

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

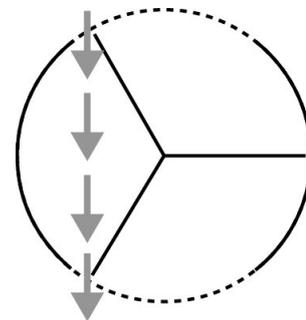
Код 9: Ответ отсутствует.

## Вопрос 2: ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ

PM995Q02 – 0 1 9

Два дверных проёма (пунктирные дуги на рисунке) имеют одинаковый размер. Если эти проёмы слишком широкие, то вращающиеся перегородки не смогут закрыть открытое пространство, и воздух сможет свободно поступать через вход и выход. Это приведёт либо к нежелательной потере тепла, либо к его увеличению. Этот случай показан на рисунке справа.

В этой позиции возможно поступление воздуха.



Какую наибольшую длину дуги в сантиметрах (см) может иметь каждый дверной проём, чтобы воздух никогда не мог свободно поступать через вход и выход?

Наибольшая длина дуги: ..... см

### ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 2

#### ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Интерпретировать геометрическую модель реальной ситуации, чтобы вычислить длину дуги.

Область математического содержания: Пространство и форма

Контекст: Научный

Познавательная деятельность: Формулировать

#### Ответ принимается полностью

Код 1: Ответ в пределах от 103 до 105. [Принимаются ответы, вычисленные, как  $\frac{1}{6}$  длины окружности ( $\frac{100\pi}{3}$ ). Также принимается ответ, равный 100, но только в случае, если понятно, что этот ответ получен в результате использования  $\pi=3$ . Примечание: Ответ, равный 100, не сопровождаемый решением, мог быть получен на основе простого предположения, что длина дуги равна радиусу (длине одной перегородки).]

#### Ответ не принимается

Код 0: Другие ответы.

- 209 [дана общая длина дуг двух дверных проёмов, а не длина дуги «каждого» из проёмов].

Код 9: Ответ отсутствует.

### Вопрос 3: ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ

PM995Q03

Дверь делает 4 полных оборота за минуту. В каждом из трёх секторов двери могут поместиться максимально 2 человека.

Какое наибольшее число людей может войти в здание через эту дверь за 30 минут?

- A 60
- B 180
- C 240
- D 720

### ВРАЩАЮЩАЯСЯ ДВЕРЬ: ОЦЕНКА ОТВЕТА НА ВОПРОС 3

ЦЕЛЬ ВОПРОСА:

Описание: Определить информацию и создать (потенциальную) количественную модель для решения проблемы.

Область математического содержания: Количество

Контекст: Научный

Познавательная деятельность: Формулировать

**Ответ принимается полностью**

Код 1: D. 720

**Ответ не принимается**

Код 0: Другие ответы.

Код 9: Ответ отсутствует.

*Комментарии:*

**Вопрос 1.** Для ответа на вопрос надо вычислить градусную меру центрального угла. Можно рассуждать так: перегородки образуют 3 равных центральных угла, значит, каждый из них равен  $360^\circ : 3 = 120^\circ$ . Однако многие учащиеся не смогли ответить на этот вопрос. Дело в том, что в курсе математики не обращается особое внимание на то, что центральный угол окружности состоит из двух развернутых углов и равен  $360^\circ$ . Об этом факте учитель может упоминать по мере необходимости при выполнении соответствующих заданий. Например, при построении круговых диаграмм, когда окружность надо разделить на сектора в соответствии с отношением величин, которые должны быть изображены на диаграмме. Поэтому неудивительно, что результаты выполнения задания невысоки: российские учащиеся – 58%, учащиеся стран ОЭСР – 58%, однако максимальный результат лидирующих стран – 90%.

Задание отнесено к области «Пространство и форма», контекст «научный», познавательная деятельность «Применять».

**Вопрос 2.** В исследовании это задание отнесено к высшему уровню сложности. Требуется воспринять новую информацию – описание представленной реальной ситуации – и интерпретировать её геометрическую модель, чтобы вычислить длину искомой дуги. При работе с моделью, опираясь на пространственное воображение, интуицию и рассуждения, можно понять, что

наибольшая длина этой дуги не может превышать половину дверного проёма, т.е. 1/6 часть длины окружности двери.

Например, можно рассуждать следующим образом: «Окружность двери разделена на 3 равных сектора. Значит, два сектора, закрытые стеклянными стенками, занимают две третьих окружности, а на два дверных проёма остается одна треть. Из соображений симметрии двух проёмов каждый из них не может быть больше половины трети (1/6 части) окружности двери».

Для решения проблемы нужно вспомнить (или посмотреть в списке формул в тетради для ученика) известную учащимся формулу длины окружности. Для использования более привычной формулы ( $l=2\pi r$ ) надо знать длину радиуса окружности двери. В начале задания указано, что диаметр двери равен 200 см, значит, радиус равен 100 см. Решение: длина окр.=  $2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 100 = 628$ ; длина искомой дуги =  $628 : 6 \approx 104,7$  (см).

Подобных задач нет в российских учебниках. Сложность задачи определяется наличием большого текста, в котором много новой для учащихся словесной информации, описывающей ситуацию. Информация представлена в различной форме: в виде текста, количественных данных и рисунков. Данные, нужные для решения, надо извлечь из разных частей текста. Слово «окружность» не упоминается в тексте задания, учащимся самим надо сообразить, что именно окружность, разделенная тремя радиусами на три равные части, является моделью вращающейся двери. Поэтому неудивительно, что результаты выполнения очень низкие: российские учащиеся – 3%, учащиеся стран ОЭСР – 4%, максимальный процент в лидирующих странах – 14%.

Этот вопрос отнесен к области «*Пространство и форма*», контекст «*научный*», познавательная деятельность «*Формулировать*».

**Вопрос 3.** Фактически это текстовая задача в 3 вопроса. Ключевой момент для создания модели решения – внимательный анализ условия задачи, связанной с непривычной практической ситуацией – реальным объектом окружающей действительности, об особенностях которого учащимся, скорее всего, ранее ничего не было известно. Видимо, самое трудное – это представить и понять, что при полном обороте дверь повернется к входу каждым из трех секторов по одному разу и в неё смогут войти три раза по 2 человека. Кроме того, следует учесть, что за минуту дверь делает 4 полных оборота. Только при выполнении этих условий можно получить верный ответ.

Возможное решение: при полном обороте двери в каждый из 3 её секторов смогут войти по 2 человека, то есть максимально  $2 \cdot 3 = 6$  (чел.). За 30 мин дверь сделает  $4 \cdot 30 = 120$  полных оборотов. Значит, за 30 мин через неё войдут  $6 \cdot 120 = 720$  (чел.)

Этот вопрос отнесен к области «*Количество*», контекст «*научный*», познавательная деятельность «*Формулировать*». Результат российских учащихся – 38%, учащихся стран ОЭСР – 46%, максимальный результат лидирующих стран – 65%.

Характерные ошибки российских учащихся говорят о неполном понимании особенностей ситуации или о несоблюдении того или иного из условий задачи. Выбор ответа С ( $240 = 2 \cdot 4 \cdot 30$ ) – говорит о том, что учащийся, скорее всего, не учитывает, что за минуту войдут не 2, а 6 человек, выбор ответа В ( $180 = 2 \cdot 3 \cdot 30$ ) – скорее всего, не учитывает, что за минуту дверь делает 4 оборота, выбор ответа А ( $60 = 2 \cdot 30$ ) – скорее всего, не учитывает 2 условия, которые указаны в комментариях к ответам В и С.